Министерство образования и науки Украины

Севастопольский национальный технический университет

Методические указания
к контрольной работе №1 по дисциплине
«МЕТРОЛОГИЯ, СЕРТИФИКАЦИЯ, АККРЕДИТАЦИЯ И ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА»
для студентов направления 0907 — «Радиотехника»
заочной формы обучения

Севастополь
2005

УДК 621.317.08(075.8)

Методические указания к контрольной работе №1 по дисциплине «Метрология, сертификация, аккредитация и измерительная техника» для студентов направления 0907 — «Радиотехника» заочной формы обучения/Сост. И.Л. Ветров.— Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2005. — 30с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам заочной формы обучения в выполнении и оформлении контрольной работы по дисциплине «Метрология, сертификация, аккредитация и измерительная техника». Приводятся контрольные задания, требования к их выполнению, содержанию и оформлению. Методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины «Метрология, сертификация, аккредитация и измерительная техника» для высших учебных заведений Украины.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлению 0907 — Радиотехника.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры радиотехники

(протокол № 5 от 2 февраля 2005 г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний

Рецензенты:

Афонин И.Л., кандидат технических наук, доцент кафедры РТ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью преподавания дисциплины «Метрология, сертификация, аккредитация и измерительная техника» (МСАИТ) является изучение студентами:

– основных понятий измерительной техники;
– видов и методов измерений;
– видов погрешностей измерений;
– вероятностного подхода к описанию погрешностей измерения;
– системы теоретических, технических и организационных способов обеспечения единства измерений;
– принципов построения основных радиоизмерительных устройств,
– принципов измерения и метрологического обеспечения разработки, производства и эксплуатации электронного оборудования;

В результате изучения дисциплины студент должен уметь:

– выбрать методы и способы измерения;
– правильно выполнить измерения с целью определения основных характеристик сигналов и цепей и оценить погрешности измерений.

Изучение дисциплины МСАИТ базируется на знаниях, полученных студентами при освоении следующих дисциплин: физика, высшая математика, информатика.

1. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Основные понятия и определения метрологии и измерительной техники.
2. Классификация измерений (прямые, косвенные, совокупные, совместные)
3. Виды погрешностей.
4. Вероятностный подход к описанию погрешностей. Интегральная и дифференциальная функции распределения погрешностей.
5. Параметры распределения случайных погрешностей. Начальные и центральные моменты.
6. Законы распределения случайных погрешностей (нормальный, равномерный, Рэлея, χ^2, Стьюдента).
7. Определение доверительных интервалов для истинного значения измеряемой величины при нормальном распределении.

8. Точечные оценки параметров распределения случайных величин и отклонений.
9. Определение доверительных интервалов при неизвестных параметрах распределения результатов измерения.
10. Систематические погрешности (СМП). Классификация СМП по причинам возникновения.
11. Способы уменьшения систематической составляющей погрешности измерения.
12. Суммирование неисключенных остатков систематических погрешностей.
13. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Представление результатов в виде гистограмм. Состоятельность, эффективность и несмещенность оценки параметров распределения.
14. Проверка нормальности результатов измерения.
15. Обнаружение грубых погрешностей.
16. Методики обработки результатов прямых многократных измерений в случаях большого и малого чисел измерений.
17. Обработка результатов косвенных измерений. Коэффициент корреляции. Графический способ выявления корреляционной связи.
18. Определение суммарной погрешности. Критерий ничтожных погрешностей.
19. Совокупные и совместные измерения.
20. Обработка результатов измерения методом наименьших квадратов. Регрессия.
21. Классификация средств измерений.
22. Основные параметры средств измерений и классы точности.
23. Эталоны единиц физических величин. Образцовые средства измерений. Поверочные схемы. Государственные испытания средств измерений.
24. Основные электромеханические приборы: магнитоэлектрические; электромагнитные; электродинамические; электростатические.
25. Принципы построения и работы электронных вольтметров.
26. Мостовые методы измерения параметров электрических цепей и компенсаторы.
27. Принципы построения и работы электронно-лучевых осциллографов.
28. Методы измерения частоты и временных интервалов
29. Методы измерения разности фаз сигналов и фазочастоных характеристик четырехполюсников

30. Законодательные и технические основы сертификации и аккредитации продукции производства

2. ОФОРМЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. По дисциплине МСАИТ студенты заочной формы обучения выполняют одну контрольную работу, которая содержит четыре задачи и теоретический вопрос.

2. Выбор варианта задачи производят по последней цифре зачетной книжки.

3. Контрольная работа выполняют в отдельной ученической тетради. На лицевой стороне тетради указывают фамилию, имя, отчество студента, группу, дисциплину, адрес студента и номер зачетной книжки.

4. Рисунки и построения выполняют простым карандашом с применением линейки. При построении зависимостей допускается применение цветной пасты, фломастеров и др.

5. При ответах на теоретические вопросы и при использовании формул без их вывода обязательно дают ссылки на библиографические источники. Ссылки на источники даются в квадратных скобках: [k], где k— порядковый номер источника в библиографическом списке, который оформляют в соответствии с требованием ЕСКД и приводят в конце каждого задания.

6. Условие задачи должно переписываться полностью с указанием исходных данных. Задачи следует сначала решать в общем виде. Расчеты должны сопровождаться подробными объяснениями и математическими выкладками. При подстановке числовых значений в полученном результате необходимо использовать международную систему единиц (СИ). Ответы на теоретические вопросы должны быть краткими и содержать суть излагаемого материала.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

3.1. Основные понятия и определения

Теория вероятности и математической статистики рассматривает случайные величины, которые могут изменяться по значению и по знаку случайным образом.

СВ бывают дискретные и непрерывные. Непрерывные СВ могут принимать значения в каком-либо промежутке без разрывов. Дискретные СВ образуют конечное или бесконечное множество, промежутки которого не заполнены.

Если дискретный характер СВ не является принципиальным, то в ряде случаев она может рассматриваться как непрерывная. Таким образом, деление СВ на дискретные и непрерывные достаточно условно.

Для количественной характеристики случайного события вводят понятие вероятности p.

Вероятность — это отношение числа положительных исходов события к общему числу событий. Вероятность достоверного события равна единице, а невероятного — нулю. События, вероятность которых больше нуля и меньше единицы считают случайными. Вероятность является безразмерной величиной.

Определить вероятность точно можно лишь в достаточно редких случаях (игральные кости, рулетка, карты, шары...). Гораздо чаще применяют статистические методы оценки (определения) вероятности событий, основанные на анализе большого числа наблюдений случайной величины.

В результате исследования явлений массового характера установлено, что событие сохраняет устойчивую частоту появления по отношению к общему числу событий, и частота событий сходится по вероятности к значению p.

Для описания случайных величин используют интегральную и дифференциальную функции распределения.

Интегральной функцией распределения (ИФР) называют зависимость вероятности того, что результат x_i наблюдения случайной величины в i-том опыте окажется меньше некоторого текущего значения x:

$$F(x) = P\{x_i \le x\} = P\{-\infty < x_i \le x\}. \qquad (3.\ 1)$$

Функция F(x), как и вероятность, размерности не имеет.

Дифференциальной функцией распределения (ДФР) или плотностью вероятности называют производную F(x) по x:

$$p(x) = \frac{d}{dx} F(x)\,. \qquad (3.2)$$

Размерность ДФР (плотности вероятности) совпадает с размерностью величины 1/x.

Интегрируя дифференциальную функцию распределения, получаем интегральную функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx\,. \qquad (3.3)$$

На рисунке 3.1 показаны примеры графиков ИФР (а) и ДФР (б).

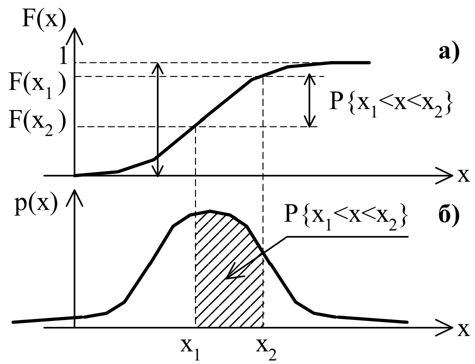

Рисунок 3.1 – Примеры графиков ИФР(а) и ДФР(б)

Функции распределения позволяют определить вероятность попадания случайной величины x в интервал с границами x_1 и x_2.

Если известна ДФР, то вероятность попадания x в указанный интервал, определяют интегрированием $p(x)$ в пределах от x_1 до x_2.

$$P\{x_1 < x \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx\,. \qquad (3.4)$$

Для ДФР справедливо условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1\,. \qquad (3.\ 5)$$

Выражение (3.5), которое называют условием нормирования ДФР, показывает, что вероятность появления СВ в интервале от $-\infty$ до $+\infty$ равна единице.

Если известна ИФР, то вероятность попадания случайной величины x в указанный интервал определяют разностью значений ИФР на границах интервала $[x_1, x_2]$.

$$P\{x_1 < x \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)\,. \qquad (3.\ 6)$$

На рисунке 3.1 показаны способы графического определения вероятностей попадания СВ в заданный интервал по ИФР (а) и ДФР (б). В первом случае искомая вероятность определяется разностью значений ординат, соответствующих аргументам x_1 и x_2, а во втором случае — площадью фигуры под кривой ДФР, ограниченной по оси x значениями случайной величины x_1 и x_2.

3.2. Числовые характеристики случайных величин

Наряду с функциями распределения, которые наиболее универсально и правильно определяют СВ, используют числовые (точечные) характеристики СВ. Такими числовыми характеристиками СВ являются начальные и центральные моменты.

Начальным моментом СВ порядка r называют число

$$a_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r p(x) dx . \tag{3. 7}$$

Наиболее важным является первый начальный момент a_1 (r=1), который называют математическим ожиданием случайной величины и обозначают MX

$$MX = a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ p(x) dx . \tag{3. 8}$$

Математическое ожидание случайной величины x характеризует ее среднее значение и является постоянной величиной.

Центральным моментом СВ порядка r называют число

$$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^r p(x) dx . \tag{3. 9}$$

Первый центральный момент СВ тождественно равен нулю.

Важную роль в теории вероятности играет второй(r=2) центральный момент, который называют дисперсией случайной величины

$$DX = m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 p(x) dx , \tag{3. 10}$$

где $x - MX$ — отклонение СВ от математического ожидания.

Дисперсия — это математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания. Она характеризует рассеивание СВ в окрестности математического ожидания или среднюю мощность случайного процесса. Размерность DX совпадает с размерностью квадрата случайной величины x, что не всегда удобно, поэтому наряду с дисперсией используют среднеквадратическое отклонение (СКО) случайной величины

$$\sigma = \sqrt{DX} . \tag{3. 11}$$

Размерность СКО совпадает с размерностью случайной величины.

Центральные моменты более высоких порядков (r>2), применяют для оценки асимметрии, плосковершинности и других характеристик ДФР.

3.3. Законы распределения случайных величин

Разные СВ могут иметь разные законы распределения. В качестве примеров рассмотрим законы распределения СВ, которые встречаются наиболее часто.

При равномерном законе распределения (рисунок 3.2) СВ может с равной вероятностью принимать значения, не выходящие за некоторые границы x_1, x_2.

С таким законом распределения СВ хорошо согласуется погрешность дискретизации в цифровых приборах.

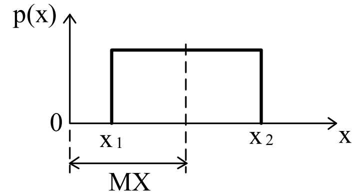

Рисунок 3.2 – ДФР при равномерном законе распределении СВ

ДФР равномерного закона распределения

$$\begin{cases} p(x) = 0 \quad \text{при } x < x_1; \\ p(x) = \dfrac{1}{x_2 - x_1} \quad \text{при } x_1 < x_2 < x_3; \\ p(x) = 0 \quad \text{при } x > x_2. \end{cases} \tag{3. 12}$$

Математическое ожидание СВ при равномерном законе распределения

$$MX = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} xdx = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{x_2 + x_1}{2}, \qquad (3.\ 13)$$

Нормальный закон распределения СВ или закон распределения Гаусса в практике радиоизмерений встречается наиболее часто. Его ДФР определяется следующим выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x - MX)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (3.\ 14)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение СВ.

График ДФР в случае нормального закона распределения показан на рисунке 3.3.

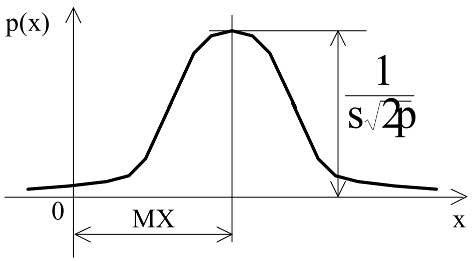

Рисунок 3.3 – ДФР при нормальном по законе распределения

Если ввести нормированное отклонение величины x от ее математического ожидания

$$t = \frac{x - MX}{\sigma}, \qquad (3.\ 15)$$

то получим нормированные дифференциальную и интегральную функции нормального распределения:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right); \qquad (3.\ 16)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz; \qquad (3.\ 17)$$

$$z = \frac{x - MX}{\sigma}. \qquad (3.\ 18)$$

Для нормированной интегральной функции нормального распределения Гаусса составлены таблицы, позволяющие облегчить процесс вычисления вероятности попадания случайной величины в заданный интервал, ограниченный значениями z_1, z_2 (таблица значений Φ(z) приведена в Приложении А)

Распределением Рэлея удобно аппроксимировать распределения погрешностей, которые могут быть только одного знака. Распределению Рэлея подвержена длина R двумерного случайного вектора, проекции которого x и y распределены нормально с одинаковыми дисперсиями и нулевыми математическими ожиданиями. В случае распределения СВ по закону Релея плотность вероятности имеет следующий вид

$$p(R) = \frac{R}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right),$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ — длина вектора.

График дифференциальной функции распределения Рэлея показан на рисунке 3.4.

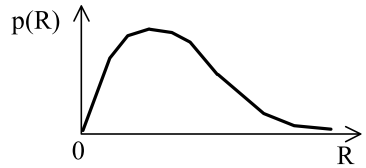

Рисунок 3.4 – График ДФР Релея

Предельные значения случайных величин (например, результатов или погрешностей измерений) определяются законом распределения. При равномерном законе распределения случайная величина не может быть больше x_2 и меньше x_1 (рисунки 3.2). Когда распределение не ограничено, как, например, при законе распределения Гаусса (рисунок 3.3), то случайная величина x может принимать любые значения от $-\infty$ до ∞, но вероятность появления значений x, отстоящих далеко от математического ожидания резко уменьшается.

3.4. Вероятностный подход к описанию погрешностей измерений

Проведение многократных измерений постоянной величины x_0 в одинаковых условиях приводит к результатам, отличающимся друг от друга. Это указывает на наличие некоторых случайных погрешностей, предсказать которые не представляется возможным. В общем случае результат измерения можно представить в виде

$$x = x_0 + \Delta x\,, \tag{3.19}$$

где x_0 — истинное значение измеряемой величины, Δx — общая погрешность измерения.

Поскольку величины, содержащие случайные составляющие, должны рассматриваться как случайные, то общая погрешность измерения Δx и результат измерения x, являются случайными величинами, так как содержат случайную составляющую погрешности Δ_p.

Определим математическое ожидание общей погрешности измерения

$$M\Delta X = \int_{-\infty}^{\infty}(x - x_0)p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx - x_0 = MX - x_0 = \Delta_m\,, \tag{3. 20}$$

где Δ_m – некоторая усредненная погрешность, которая закономерно проявляется в каждом измерении.

Величину Δ_m будем рассматривать как систематическую погрешность измерения, а случайную погрешность определим как разность между результатом x_i однократного измерения и математическим ожиданием результата измерения:

$$\Delta_{pi} = x_i - MX\,. \tag{3. 21}$$

Таким образом, истинное значение измеряемой величины можно представить в виде

$$x_0 = x_i - \Delta_m - \Delta_{pi}\,. \tag{3. 22}$$

Способы определения и уменьшения систематических погрешностей хорошо разработаны. Если систематическая погрешность Δ_m определена достаточно точно, то она может быть исключена из резуль-

тата измерения введением поправки. Разность $x_i - \Delta_m$ называют исправленным результатом измерения.

3.5. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Пусть случайная величина x_i, например, результат однократного измерения, имеет среднеквадратическое отклонение σ, математическое ожидание $MX=x_0+\Delta_m$ и распределена по нормальному закону. Соответствующий график ДФР показан на рисунке 3.5.

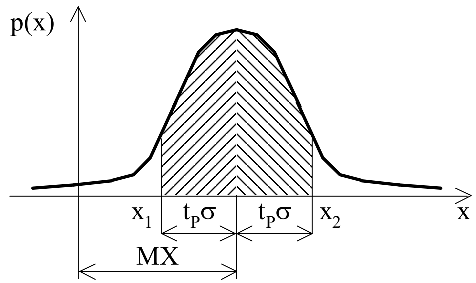

Рисунок 3.5 – К методике определения доверительной вероятности

Выделим на графике симметричный относительно нуля интервал с границами $x_1=MX-t_P\sigma$ и $x_2=MX+t_P\sigma$, который будем называть доверительным интервалом, а вероятность $P_Д$ нахождения СВ (результата измерения) в этом интервале — доверительной вероятностью.

Вероятность того, что случайная погрешность измерения $\Delta_{pi}=x_i-MX$ по модулю не превысит $t_P\sigma$, т.е. результат однократного измерения окажется в пределах выделенного интервала, можно определить с помощью нормированной ДФР

$$P_Д\{-t_P\sigma < \Delta_{pi} \le +t_P\sigma\} = \int_{-t_P}^{+t_P} p(t)dt\,, \tag{3.23}$$

или с помощью нормированной ИФР

$$P_Д\{-t_P\sigma < \Delta_{pi} \le t_P\sigma\} = \Phi(z = t_P) - \Phi(z = -t_P) =$$

$$= 2\Phi(z = t_P) - 1\,, \tag{3.24}$$

где $t_P = (x_2 - MX)/\sigma = -(x_1 - MX)/\sigma$.

На практике наиболее часто используют доверительные интервалы шириной ±σ, ±2σ, ±3σ. Найдем доверительную вероятность попадания в эти интервалы случайной величины, распределенной по нормальному закону.

Используя таблицу А1 (Приложение А), для доверительного интервала шириной ±σ ($z=t_P=\pm1$) в соответствии с (3.24) находим доверительную вероятность:

$$P_Д = \Phi(z=1) - \Phi(z=-1) = 0{,}8413 - 0{,}1578 = 0{,}6826$$

или

$$P_Д = 2\Phi(z=t_P) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826.$$

Таким образом, вероятность того, что случайная величина (например, результат измерения) окажется в пределах ±σ относительно математического ожидания, приблизительно равна 68 %.

Для доверительных границ, определенных значениями ±2σ ($z=t_P=\pm2$), доверительная вероятность составляет

$$P_Д = 0{,}9972 - 0{,}0228 = 0{,}9544,$$

т.е. приблизительно 95 %.

Наиболее часто используют доверительный интервал шириной ±3σ $z=t_P=\pm3$), для которого $P_Д=0{,}9973$. Это означает, что вероятность выхода СВ за границы доверительного интервала всего 0,0027 (0,27 %), поэтому значение 3σ часто называют предельным или максимальным отклонением СВ от математического ожидания.

Величину $\Delta_P=t_P\sigma_x$ называют доверительной границей случайной погрешности измерений, а результат измерения записывают в следующем виде

$$x_0 = x_i \pm \Delta_P;\ P_Д = ...\%.$$

3.6. Оценки параметров распределения

При радиоизмерениях в качестве случайной величины выступают результаты измерений или их случайные погрешности. Характеристики случайной величины (MX, DX, σ) всегда оценивают путем обработки некоторого числа n измерений. Качество оценок параметров СВ характеризуют следующими понятиями.

Оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание совпадает с истинным значением оцениваемого параметра.

Оценка называется состоятельной, если ее отличие от истинного значения оцениваемого параметра уменьшается при увеличении числа

обрабатываемых результатов измерений.

Оценка называется эффективной, если ее дисперсия меньше дисперсии любой другой оценки.

Рассмотрим способы оценки математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения на основании ограниченного числа n равноточных результатов измерений величины x_0.

Оценкой математического ожидания в этом случае является среднее арифметическое результатов измерений

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx MX, \qquad (3.\ 25)$$

где x_i — результаты измерений.

Среднее арифметическое — это несмещенная и состоятельная оценка математического ожидания, а в случае нормального закона распределения это и эффективная оценка.

Оценку дисперсии однократного измерения x_i производят по следующей формуле

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \approx DX. \qquad (3.\ 26)$$

где S_x^2 — оценка дисперсии.

В соответствии с (3.11) оценивают СКО

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \approx \delta_x. \qquad (3.\ 27)$$

Если имеется n равноточных результатов измерений (многократные измерения) величины x_0, то в качестве результата измерения целесообразно принять среднее арифметическое $\bar{x}$ (3.25), которое, в свою очередь, также является случайной величиной, обладающей своей дисперсией $D\overline{X}$.

В теории математической статистики доказывается, что дисперсия среднего в n раз меньше дисперсии однократного измерения

$$D\overline{X} = \frac{DX}{n}, \qquad (3.28)$$

поэтому, учитывая (3.26), оценку дисперсии среднего производят в соответствии с (3.28):

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}. \qquad (3.\ 29)$$

Формулы (3.25)…(3.29) позволяют с достаточно точно произвести оценки MX и DX при большом количестве n>40 результатов измерений. При меньшем числе обрабатываемых измерений указанные величины определяются с большой погрешностью.

3.7. Определение доверительного интервала случайной погрешности измерений

В практике измерений часто требуется по заданной доверительной вероятности определить границы доверительного интервала случайной погрешности, распределенной по нормальному закону.

В случае обработки большого количества (n>40) результатов равноточных измерений оценки параметров распределения получают по формулам (3.25)…(3.29).

После оценки значения $S_{\bar{x}}$ для заданной доверительной вероятности $P_Д$ в соответствии с (3.24) определяют соответствующее значение нормированной интегральной функции нормального распределения

$$\Phi(z = t_P) = \frac{P_Д + 1}{2}$$

и по таблицам Φ(z) (приложение А) определяют значение нормированного отклонения t_P.

Далее находят доверительную границу погрешности $\Delta_P = t_P S_{\bar{x}}$ и записывают результат измерения с указанием доверительной границы погрешности и доверительной вероятности:

$$x_0 = \bar{x} \pm t_P S_{\bar{x}}, \quad P_Д = \ldots$$

Если число результатов измерений мало, то оценка СКО может существенно отличаться от σ_x, т.к. S_x тоже является случайной величиной, что приведет к ошибочной оценке границы доверительной погрешности.

В случае распределения результатов наблюдения X по нормальному закону и при n<30 распределение величина

$$t = \frac{x - MX}{S_{\bar{x}}}$$

подчиняется закону Стьюдента, для которого нормированная ДФР имеет следующий вид

$$s(t,k) = B_k \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2},$$

где $k = n - 1$ — число степеней свободы; B_k — коэффициент, зависящий от числа степеней свободы.

Интегральная функция распределения Стьюдента

$$S(t,k) = \int_{-\infty}^{t} s(t,k)dt.$$

С увеличением k распределение Стьюдента асимптотически приближается к нормальному распределению с MX=0 и σ=1.

При известных оценке S_X, n и заданной доверительной вероятности $P_Д$ по таблицам Стьюдента (приложение Б) определяют t_P. Доверительные границы погрешности измерения записывают в следующем виде:

$$\Delta_P = t_P S_X.$$

Пример 1. В результате девяти измерений величины напряжения U получены следующие оценки параметров распределения результатов измерения: $MX \approx \bar{U}$ =20,001 В; $\sigma \approx S_U$=0,0004 В. Известно, что результаты распределены по нормальному закону. Определить доверительную границу погрешности измерения Δ_p на основании опытных данных с доверительной вероятностью 95%.

Значение t_P определим по таблице Б1 (см. Приложение Б) для $P_Д$=0,95 и k=n–1=8. Это значение t_P=2,306. Доверительная граница погрешности

$$\Delta_P = t_P S_{\bar{x}} = t_P \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 2{,}306 \frac{0{,}0004}{\sqrt{9}} = 0{,}0003078.$$

Результат измерения запишем в следующем виде:

U=(20,001±0,00031) В; $P_Д$=95%.

3.8. Представление результатов многократных измерений в виде гистограмм

Предположение о законе распределения результатов наблюдений можно сделать в некоторых случаях на основании вида гистограмм, представляющих собою эмпирические кривые распределения.

Для построения гистограммы весь диапазон имеющихся значений x делят на 5…7 интервалов (разрядов).

Подсчитывают частоту m_j — количество значений x, приходящихся на каждый интервал и определяют частость

$$p_j = m_j/n. \qquad (3.37)$$

Сумма частостей всех разрядов равна 1. В случае попадания некоторых значений x на границу интервалов, их относят к правому разряду.

На каждом интервале строят прямоугольник, основанием которого является i-тый интервал, а высота — пропорциональна p_j. Фигура, образованная прямоугольниками, является гистограммой, отображающей функцию плотности распределения величины x. Полигон распределения получают при соединении средин верхних сторон прямоугольников прямыми линиями, как показано на рисунке 3.6.

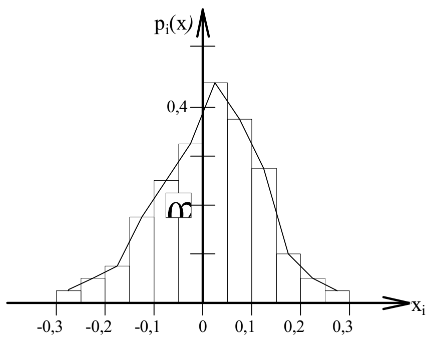

Рисунок 3.6 — Гистограмма и полигона распределения СВ

По виду гистограммы или полигона можно сделать предположение о виде теоретического закона распределения случайной величины. Для более строгого заключения о виде распределения необходимы дополнительные исследования.

3.9. Оценка нормальности распределения при n>40

Для проверки гипотез о законе распределения могут быть использованы различные критерии. Проверку нормальности результатов наблюдения обычно ведут на основании критерия согласия χ^2.

В качестве меры расхождения, при реализации критерия согласия χ^2, принимается сумма квадратов разностей частостей и теоретических вероятностей попадания результатов наблюдений в каждый интервал, взятых с некоторыми весовыми коэффициентами каждого интервала (разряда)

$$U = \sum_{i=1}^{R} c_i (p_i - P_i)^2 , \qquad (3.38)$$

где c_i — весовые коэффициенты разрядов; p_i — частость, полученная из гистограммы; P_i — теоретическая вероятность попадания случайной величины в i-тый интервал. В практических задачах о проверке нормальности распределения значение P_i определяется по таблице, как

$$P_i = \Phi\left(z = \frac{x_{iв} - \bar{x}}{S_x}\right) - \Phi\left(z = \frac{x_{iн} - \bar{x}}{S_x}\right), \qquad (3.39)$$

где $x_{iн}$, $x_{iв}$ — значения нижней и верхней границ i-того разряда соответственно.

Мера расхождения U является случайной величиной и независимо от распределения подчиняется χ^2 — распределению Пирсона с k степенями свободы при условии, что все частоты $m_i \geq 5$, число измерений стремится к бесконечности, а веса выбирают равными n/P_i. Число степеней распределения

$$k = R - s , \qquad (3.40)$$

где R — число разрядов интервалов гистограммы (при условии $m_i \geq 5$); s — число независимых связей, наложенных на частости p_i.

Если проверяется гипотеза о нормальности распределения, к числу этих связей относятся:

$$1)\ \bar{x} = MX ; \qquad 2)\ S_x^2 = DX ; \qquad 3)\ \sum_{i=1}^{R} p_i = 1 .$$

Поэтому при определении нормальности распределения s=3.

Мера расхождения, выбранная по Пирсону, имеет следующее выражение:

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{R} \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i} = n\sum_{i=1}^{R} \frac{(p_i - P_i)^2}{P_i}\,. \qquad (3.\ 41)$$

Для проверки гипотезы о нормальности распределения значение χ_k^2 сравнивают с границами интервала для χ_k^2, определяемого по таблице (Приложение В), для принятой доверительной вероятности $P_Д = 1 - q$, где q — уровень значимости. Этими границами будут значения $\chi_{k,\alpha 1}^2$ и $\chi_{k,\alpha 2}^2$, где α_1=q/2, α_2=1–q/2. Если мера расхождения χ_k^2 окажется в указанном интервале, то гипотеза принимается. Это не означает, что она верна. Можно лишь утверждать, что она правдоподобна, т.е. не противоречит опытным данным. Если же χ_k^2 выходит за границы доверительного интервала, то гипотеза отвергается.

Порядок проверки нормальности распределения по критерию χ_k^2.

1. Результаты наблюдений группируют по интервалам, определяют частоты m_i. Интервалы, в которых m_i<5, объединяют с соседними интервалами. Число степеней свободы при этом уменьшается.

2. Вычисляют оценки параметров распределения $\overline{x}$ и S_X, которые принимают в качестве параметров теоретического нормального распределения.

3. Для каждого интервала находят вероятности попадания в него по формуле (3.5).

4. Вычисляют для каждого интервала меру расхождения χ_i^2 и суммируют их значения.

5. Определяют число степеней свободы k=R–3 для нового числа интервалов и, задаваясь уровнем значимости q , находят границы $\chi_{k,\alpha 1}^2$ и $\chi_{k,\alpha 2}^2$.

Пример 2. Проверить нормальность распределения результатов наблюдения, приведенных в таблице 3.1, для которых определены $\overline{x}$=8,91936 В и S_X=0,0028 В.

Результаты вычислений и определения по таблицам необходимых величин приведены в таблице 3.1. Значения P_i определены как разности Ф(z), найденных для границ интервалов

Таблица 3.1 – Результаты вычислений к примеру 2

i	Границы интервалов		m_i	$Z = \frac{x_{iВ} - \overline{X}}{S_x}$	$Ф(z_i)$	P_i	np_i	$\frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}$
	$x_{iН}$	$x_{iВ}$						
1	8.919	8.913	1 } 6	-2.27	0.0116	0.0116	1.16 } 5.68	
2	8.913	8.915	5	-1.56	0.0594	0.0478	4.52	0.018
3	8.915	8.917	14	-0.845	0.1991	0.1397	13.97	0.0000
4	8.917	8.919	27	-0.129	0.4487	0.2496	24.96	0.1670
5	8.919	8.921	24	0.586	0.721	0.2723	27.24	0.3840
6	8.921	8.923	18	1.301	0.9034	0.1824	18.24	0.0021
7	8.923	8.925	9 } 1	2.016	0.978	0.0746	7.46 } 9.34	
8	8.925	8.927	2 1	2.731	0.9968	0.0188	1.88	0.2950

Меру расхождения χ_k^2 определим, используя данные таблицы распределения Пирсона:

$$\chi_k^2 = \sum_{1}^{6} \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i} = 0{,}8661$$

В связи с тем, что четыре интервала были объединены в два, то R=8–2=6, а число степеней свободы k=R–3=3. Находим границы, задаваясь уровнем значимости q=0,1 ($P_Д$=0,9):

$$\chi_{3,0.05}^2 = 0.352\,; \qquad \chi_{3,0.95}^2 = 7.815\,.$$

Полученное значение χ_k^2=0.8661 лежит в интервале значений 0,352 и 7,815. Следовательно, с вероятностью 90 % распределение является нормальным.

3.10. Оценка нормальности распределения при n<40

При небольшом количестве измерений для оценки нормальности распределения применяют статистическую функцию $F_n(X_k)$ распределения результатов измерений.

Для построения $F_n(X_k)$ исходные результаты n равноточных измерений $x_1, x_2, \dots x_n$ выстраивают по мере возрастания в вариационный ряд $X_1, X_2, \dots X_k, \dots X_j$, члены которого удовлетворяют условию:

$$X_1 \le X_2 \le \dots \le X_k \le \dots \le X_j,\ \ k=1, 2, \dots, j,$$

где $X_1 = x_{МИН}$, $X_j = x_{МАКС}$ — первый и последний члены вариационного ряда; j≤n — число членов вариационного ряда.

Если в исходном ряде результатов имеется m одинаковых значения x, то j<n. Например, в исходном ряде, состоящем из n=19 результатов измерений, $x_5=x_7$ и $x_3=x_9=x_{18}$. При построении вариационного ряда оказалось, что $X_2=x_5=x_7$ соответствует $m_2=2$ а $X_5=x_3=x_9=x_{12}=x_{18}$ соответствует $m_5=4$ членам исходного ряда. В этом случае число членов вариационного ряда $j=n-(m_2-1)-(m_5-1)=19-1-3=15$.

Значение ступенчатой функции распределения определяют по формуле

$$F_n(X_k)=\frac{M_k}{n+1}. \qquad (3.42)$$

Здесь M_k – число значений x в исходном ряде, удовлетворяющих условию $x \le X_k$.

Функция $F_n(X_k)$ при увеличении n сходится по вероятности к интегральной функции распределения. Если принять $F_n(X_k)=\Phi(z_k)$, то в соответствии с (3.18) получим

$$z_k=\frac{X_k-MX}{\sigma_X}. \qquad (3.44)$$

Выражение (3.44) показывает, что при нормальном законе распределения результатов измерения значения X_k и z_k связаны линейной зависимостью, т.е. точки X_k, z_k, нанесенные в виде графика, должны располагаться вдоль прямой линии. Если получится кривая линия, то гипотеза о нормальности распределения отвергается, как противоречащая опытным данным.

Пример 3. Проверить нормальность распределения следующих n=19 исходных результатов измерения напряжения u.

u_1= 18,305	u_6= 18,308	u_{11}= 18,312	u_{16}= 18,308
u_2= 18,306	u_7= 18,310	u_{12}= 18,305	u_{17}= 18,307
u_3= 18,311	u_8= 18,303	u_{13}= 18,307	u_{18}= 18,309
u_4= 18,309	u_9= 18,308	u_{14}= 18,308	u_{19}= 18,310
u_5= 18,304	u_{10}= 18,306	u_{15}= 18,309	

Вариационный ряд U_k, результаты промежуточных вычислений и определения z_k приведены в таблице 3.2.

Таблица3.2 — Результаты вычислений к примеру 3.

k	u_i	U_k (значение)	m_k	M_k	$F(X_k)=\Phi(z_k)$	z_k (по табл.)
1	u_8	18,303	1	1	0,05	–1,64
2	u_5	18,304	1	2	0,1	–1,28
3	u_1, u_{12}	18,305	2	4	0,2	–0,84
4	u_2, u_{10}	18,306	2	6	0,3	–0,52
5	u_{13}, u_{17}	18,307	2	8	0,4	–0,25
6	u_6, u_9, u_{14}, u_{16},	18,308	4	12	0,6	0,25
7	u_4, u_{15}, u_{18}	18,309	3	15	0,75	0,67
8	u_7, u_{19}	18,310	2	17	0,85	1,04
9	u_3	18,311	1	18	0,9	1,28
10	u_{11}	18,312	1	19	0,95	1,64

На рисунке 3.7 представлена зависимость $z_k(X_k)$, которая показывает, что точки располагаются близко к прямой линии. Следовательно, распределение результатов измерений можно считать нормальным

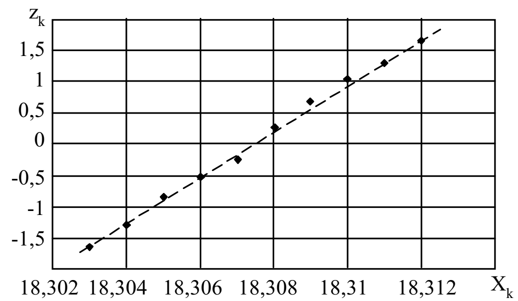

Рисунок 3.7 – График зависимости $z_k(X_k)$

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.

Задача 4.1.

В результате 10 измерений величины А получены результаты, приведенные в таблице 4.1. Требуется:

1) оценить наиболее вероятное значение (математическое ожидание) измеряемой величины;

2) оценить среднеквадратическую погрешность S_X результата однократного измерения;

3) оценить среднеквадратическую погрешность $S_{\overline{X}}$ результата многократного (n=10) измерения;

4) определить границы доверительного интервала для истинного значения измеряемой величины при заданной доверительной вероятности $P_Д$ в случае усреднения результатов измерения;

5) проверить нормальность распределения результатов измерений.

Таблица 4.1 – Исходные данные к заданию 4.1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А1	100	201	151	104	147	204	247	304	300	98
А2	101	200	153	102	146	198	248	302	297	97
А3	100	199	150	100	150	199	249	298	297	99
А4	97	198	149	100	153	196	250	300	299	101
А5	98	197	150	96	154	200	250	300	301	100
А6	99	202	148	97	150	201	251	299	302	103
А7	103	203	152	103	151	202	252	296	298	102
А8	102	201	147	98	149	197	253	301	303	99
А9	101	199	150	99	148	200	250	299	300	101
А10	101	199	150	99	148	200	250	299	300	101
Рд	0,9	0,95	0,975	0,9	0,95	0,975	0,9	0,95	0,975	0,9

Задача 4.2.

Определить погрешность косвенного измерения мощности по измеренным значениям тока I и напряжения U. Относительные погрешности измерения тока и напряжения соответственно равны δI, δU.

Исходные данные для расчета приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2– Исходные данные к заданию 4.2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I, А	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
U, В	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
δI, %	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	3,5	3,0	3,5
δU, %	3,0	2,5	2,0	3,5	3,0	3,5	2,0	3,0	3,5	4,0

Задача 4.3.

Определить величину дополнительного сопротивления $R_{ДОП}$, включенного последовательно с вольтметром, имеющим внутреннее сопротивление $r_{ВХ}$, если при отсутствии $R_{ДОП}$ вольтметр показал значение U_1, а при подключении $R_{ДОП}$ его показания равны U_2.

Исходные данные приведены в таблице 4.3.

Таблица 4. 3– Исходные данные к заданию 4.3

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r_{ВХ}$, кОм	300	250	200	150	100	150	200	250	300	250
U_1, В	150	150	100	1000	80	90	140	140	130	130
U_2, В	50	30	25	50	30	45	70	60	70	45

Задача 4.4

Приведите ответы на следующие вопросы и задания.

n=0;1

1 Что такое интегральная и дифференциальная функции распределения случайной величины? Приведите выражения и графики ИФР и ДФР для распределений: равномерное, Симпсона, Гаусса.

2 Поясните принцип действия электромеханического прибора индукционной системы.

n=2;3

1 Как оценивают математическое ожидание и дисперсию результата измерения при неизвестном законе распределения измеряемой величины?

2 Поясните принцип действия электромеханического прибора магнитоэлектрической системы.

n=4;5

1 Что такое гистограмма и как ее строят по результатам многократных прямых измерений?

2 Поясните принцип действия электромеханического прибора электромагнитной системы.

n=6;7

1 Как можно проверить гипотезу о нормальности распределения результатов в случае большого числа (n>40) измерений?

2 Поясните принцип действия электромеханического прибора электродинамической системы.

n=8;9

1 Как можно проверить гипотезу о нормальности распределения результатов в случае малого числа (n<40) измерений?

2 Поясните принцип действия электромеханического прибора электростатической системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Рудзит Я.А. Основы метрологии и надежность в приборостроении: Учебное пособие для студентов приборостроительных специальностей вузов/ Я.А Рудзит, В.Н. Плуталов. — М.: Машиностроение, 1991.—304с.
2. Кукуш В.Д. Электрорадиоизмерения/ В.Д Кукуш. — М.: Радио и связь, 1985.— 368 с.
3. Кушнир Ф.В. Измерения в технике связи/ Ф.В Кушнир, В.Г. Савенко, С.М. Верник.— М.: Высш. Шк., 1976. —432 с.
4. Основы метрологии и электрические измерения. Учебник для вузов/Б.Я. Авдеев, Е.М. Антонюк, Е.М. Душин и др.; Под ред. Е.М. Душина. – 6 изд., перераб. и доп. — Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 480 с.
5. Тюрин Н.И. Введение в метрологию/ Н.И. Тюрин. — М.: Госстандарт, 1973.— 437 с. .
6. Кушнир Ф.В. Электрорадиоизмерения. Учебное пособие для вузов/ Ф.В. Кушнир, В.Г. Савенко. — Л., Энергия, 1975. — 368с.

Дополнительная литература

1. Орнацкий П.П. Теоретические основы информационно—измерительной техники/ П.П. Орнацкий. — К.: “ Вища шк.”, 1976. – 432 с.
2. Диденко Л.Г. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента/ Л.Г. Диденко, В.В. Керженцоев.— М., Изд-во Моск. Ун-та, 1977.— 112 с.
3. Бурдун Г.Д. Основы метрологии/ Г.Д. Бурдун, Б.Н. Марков. — М.: Госстандарт, 1972. – 247 с.
4. Измерения в электронике: Справочник /В.А. Кузнецов, В.А. Долгов, В.М. Коневских и др.; Под ред. В.А. Кузнецова. — М.: Энергоатомиздат, 1987. – 512 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Интегральная функция нормированного нормального распределения

Таблица А.1 — Значения ИФР нормированного распределения Гаусса.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dt$$

Z	Ф(Z)	Z	Ф(Z)	Z	Ф(Z)	Z	Ф(Z)
–3,9	0,0000	–1,2	0,1151	0,1	0,5398	1,3	0,9032
–3,5	0,0002	–1,0	0,1587	0,2	0,5793	1,4	0,9192
–3,0	0,0014	–0,9	0,1841	0,3	0,6179	1,5	0,9932
–2,5	0,0062	–0,8	0,2119	0,4	0,6554	1,6	0,9452
–2,0	0,0228	–0,7	0,2420	0,5	0,6915	1,7	0,9554
–1,9	0,0288	–0,6	0,2749	0,6	0,7257	1,8	0,9641
–1,8	0,0359	–0,5	0,3085	0,7	0,7580	1,9	0,9713
–1,7	0,0446	–0,4	0,3446	0,8	0,7881	2,0	0,9772
–1,6	0,0548	–0,3	0,3821	0,9	0,8159	2,5	0,9938
–1,5	0,0668	–0,2	0,4207	1,0	0,8413	3,0	0,9986
–1,4	0,0808	–0,1	0,4602	1,1	0,8643	3,5	0,9998
–1,3	0,0968	0,0	0,5000	1,2	0,8849	3,9	1,0000

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
Распределение Стьюдента

Таблица Б.1 — Значения t_P, для различных доверительных вероятностей при различных количествах измерений (Распределение Стьюдента)

n	$P_{дов}$=90%	$P_{дов}$=95%	$P_{дов}$=97,5%	$P_{дов}$=99%	$P_{дов}$=99,9%
2	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
3	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
9	1,86	2,306	2,986	3,355	
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
15	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
20	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
30	1,70	2,04	2,46	2,76	3,66
61	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
∞	1,65	1,96	2,38	2,58	3,29

ПРИЛОЖЕНИЕ В
Интегральная функция χ^2 – распределения Пирсона

Таблица В.1 — Значения χ^2 в зависимости от числа степеней свободы k и вероятности α.

k\α	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,50	0,10	0,05
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,455	2,71	3,841
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	1,386	4,60	5,991
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	2,370	6,25	7,815
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,646	3,360	7,78	9,488
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,340	4,350	9,24	11,070
8	1,646	2,030	2,730	3,490	4,590	7,340	13,36	15,507
10	2,560	3,060	3,940	4,860	6,180	9,340	15,99	18,307